Sesión de entrenamiento para primaria y secundaria

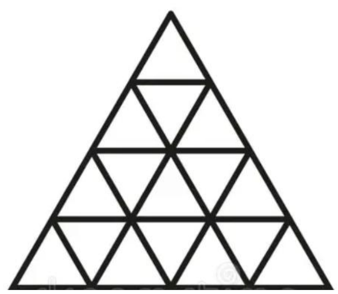
7 y 21 de febrero

Problemas para la primera parte.

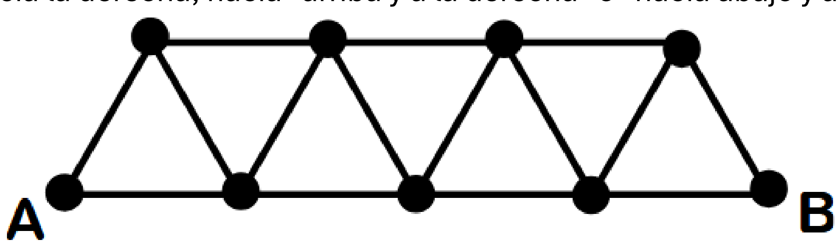
Problemas de conteo. Recuerden que el objetivo es entender la importancia de contar con orden para asegurarnos de que no nos falten o nos sobren posibilidades, porque si la respuesta no es exacta, no tendrán el punto.

También se mencionó que el examen *no es un examen de velocidad*, no ganan más puntos por terminar rápido, sino que, al contrario, les puede perjudicar, porque si entregan muy rápido y luego se dan cuenta de que se equivocaron, no van a poder corregir su respuesta.

1. El número **41a3b** está formado por cinco cifras diferentes, pero hay dos de ellas que no se pueden ver. Si sabemos que el número es múltiplo de 5, ¿cuántas posibilidades hay?
2. ¿De cuántas formas puedes escoger 3 de las 5 vocales y ponerlas en orden alfabético?
3. ¿Cuántos triángulos en la figura NO apuntan hacia arriba?



4. ¿Cuántos números entre 1 y 2026 son múltiplos de 3 pero no son múltiplos de 9?
5. ¿Cuántas formas hay de ir del punto A al punto B sin pasar dos veces por algún punto, si siempre se debe mover hacia la derecha, hacia "arriba y a la derecha" o "hacia abajo y a la derecha"?



6. Drini escribe en su libreta todos los números de dos cifras que, cuando multiplicas sus dos cifras, obtienes la mitad del número con el que empezaste. ¿Cuántos números escribió en la libreta?
7. El número de 6 cifras 1ABCDE cumple que si lo multiplicas por 3, el resultado es ABCDE1. ¿Cuánto vale A+B+C+D+E?
8. Si escribes en una pizarra el número 1 cincuenta veces, el número 2 lo escribes cuarenta y nueve veces, el número 3 lo escribes cuarenta y ocho veces, y continúas este patrón hasta escribir el número 49 dos veces y el 50 una vez, ¿Cuántas **cifras** escribiste, en total, en la pizarra?

Soluciones:

1. Aunque se puede resolver haciendo una lista, también puede observarse que la letra *b* solo puede ser 5 o 0 (algunos pueden no darse cuenta del cero). En ambas posibilidades, hay 6 ,maneras de escoger *a*, de modo que el total será 6+6=12.
2. Este lo resolvemos por casos. Aquí es importante señalar la importancia de hacerlo de forma ordenada para llegar a una respuesta. Los casos son “dependiendo de la letra inicial”. Cuando…
    a. Inicia con A, son 6, siendo las terminaciones: EI, EO, EU, IO, IU, OU
    b. Inicia con E, son 3: IO, IU, OU
    c. Inicia con I, solo OU.

    Por tanto el total es 10.
3. Son 7 triángulos: 6 pequeños que apuntan hacia abajo y uno mayor en el centrol
4. La cantidad de múltiplos de 3 que hay la podemos obtener dividiendo 2026 entre 3, y resulta 675. Pero cuando haces la lista, al ver cuales son múltiplos de 9, resulta “No, No, Sí, No, No, Sí, No, No, Sí, …” por lo que la tercera parte son múltiplos de 9. Así, tenemos 675/3 = 225 múltiplos de 9, y por tanto hay 675-225=450. Alternativamente, podemos dividir 2026 entre 9 para ver que hay 225 múltiplos de 9 y luego hacer la resta.
5. Son 34. Se resuelve “llenando la figura” sumando caminos.
6. Observación para el instructor: Lo que están pidiendo es resolver
$$a \cdot b = \frac{10a + b}{2}$$
donde a, b son dígitos y $a \neq 0$. Pero observa que, aunque tengas dos variables, si una de ella fuera conocida, podrías despejar la otra. Esto quiere decir que puedes resolverlo “por casos”, cuando $a = 1, 2, 3, \dots, 9$.

    Alternativamente: observa que $10a + b$ debe ser par, por lo que b es par, y entonces puedes sustituir $b = 0,2,4,6,8$ y despejar a. Solo hay valor que funciona por lo que la respuesta es 1.
7. Se resuelve planteando “la multiplicación larga” y deduciendo las cifras. Por ejemplo, A tiene que ser 7 para que la multiplicación termine en 1. Se plantea nuevamente la multiplicación pero ahora poniendo 7 en vez de A y se deduce que B=5, y así sucesivamente. El número debe ser 142857 por lo que la suma buscada es 4+2+8+5+7=26.
8. Este problema es una buena introducción a la segunda parte.

    Al escribir los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se necesitan 50+49+48+47+46+45+44+43+42 cifras. Los números 10, 11, 12, 13, 14, …, 49, 50 necesitan **el doble** de 41+40+39+38+37+⋯+1. El resultado es 2136.

Problemas para la primera parte.

Si no hicieron el problema 8 de la primera parte, COMIENZA con ese problema.

Si lo hicieron, comienza reflexionando que si en vez de 50 hubiera sido 2000, no lo hubieran podido hacer "a mano" porque serían demasiado, de modo que es importante conocer formas diferentes.

Solución alternativa del problema 8 final.

Observa que 50+49+48+47+46+45+44+43+42 + 2(41+40+39+38+37+⋯+1) es igual a

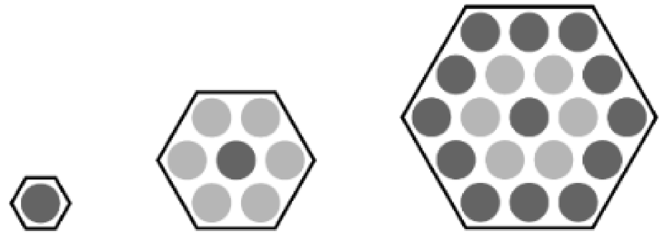
(1+2+3+....+50) + (1+2+...+41). Señala que son sumas "similares", y les cuentas que hay una manera de hacer sumas de ese estilo. Les presentas la suma de Gauss.

Con la suma de Gauss, el problema anterior se convierte en 50*51/2 + 41*42/2=2136.

PROBLEMAS

1. Carolina juega Minecraft y construye una pirámide como la de la figura, de 5 niveles, con bloques de tierra y bloques de diamante

   Si hiciera una pirámide similar, pero de 60 niveles, ¿cuántos bloques de diamante necesita?
2. En una pizarra se escribe la siguiente serie de números: 10, 14, 18, 22, 26, y se continúa siempre sumando 4, hasta que haya 100 números en la pizarra. ¿Cuál es el último número escrito y cuánto suman todos?
3. Observa la siguiente progresión de figuras. La primera figura consta de un punto. La segunda figura tiene 7 puntos, la tercera figura tiene 19 puntos. Imagina que continúas la progresión hasta la figura 20256.
   a) ¿Cuántos puntos más tiene la figura 2026 que la figura 2025?
   b) ¿Cuántos puntos tiene la figura 2026?



Nota: Aquí los incisos los pueden explicar personas diferentes.

4. En un cine, cada fila de asientos tiene un asiento más que la fila anterior. Si la fila de adelante tiene 35 sillas, y la fila de atrás tiene 78, ¿Cuántas personas caben en el cine?
5. Amanda escribe todos los números del 1 al 2025. Luego subraya todos los que sean múltiplos de 3. ¿cuánto suman los números que no fueron subrayados?
6. Jorge tiene un número de 4 cifras diferentes. Si borras una de sus cifras (no sabemos cuál), obtienes un número de 3 cifras. Cuando sumas el número de 4 cifras con el de 3 cifras, obtienes 6031. ¿Cuánto suman las cifras del número original?
7. Fernanda tiene unas tarjetas con los números desde el 2000 hasta el 2050. Pero se le cayeron, se revolvieron y al recogerlas, no se dio cuenta de que se una se quedó en el piso. Cuando llegó a su casa se dio cuenta que le faltaba una. ¿Cómo podría saber cuál falta sin ponerlas primero en orden?
8. Si escribes la lista 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5, 6, 6, … hasta que tengas 6000 números en la lista, ¿Cuál será el último número escrito?

SOLUCIONES

1. Si borramos los bloques de tierra, vemos que los bloques de diamante, de arriba hacia abajo, en cada fila son: 1, 2, 3, 4, … y si continuamos hasta que la pirámide tenga 60 niveles, en el nivel de abajo habría 59 bloques de diamante. Por eso, lo que estamos buscando es la suma

   $$1+2+3+\ldots+59 = 59\cdot 60/2 = 1770.$$

2. El último número es 10 sumado con 99 veces 4, es decir, 406. La suma la podemos calcular de varias formas Por ejemplo, puedes restar 10 a cada número (estás restando 10·100=1000 de la suma total), para obtener 0+4+8+12+16+… y observar que esto es **4 veces la suma 1+2+3+…+99**. Aplica Gauss y obtienes 20800.

   Hay una forma diferente de sumar estas progresiones cuando conoces el inicio el final y la cantidad, es:

   $$suma = \frac{((valor\ inicial + valor\ final) \times cantidad)}{2}$$

   Así, aquí sería

   $$\frac{(10+406)\times 100}{2} = 20800$$

3. Puedes comenzar haciendo algunos ejemplos más en la pizarra.

a. Observemos que la cantidad de puntos extra que tiene cada figura respecto de la anterior, es la cantidad de puntos en "su capa exterior". Si nos olvidamos de la primera figura, veremos que la cantidad de puntos en la capa exterior a partir de la segunda son:

$$6, 12, 18, 24, \ldots$$

Es por ello que, la figura 2026, será la posición 2025 de la lista anterior (porque no usamos la primera figura). Pero como esa lista son los múltiplos de 6, el resultado será 6·2025=12150.

b. La cantidad de puntos en la figura 2026 es:

$$1 + 6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 12150,$$

Porque la cantidad de puntos en última figura es la suma de todas las capas. Nuevamente, quitando el 1 inicial que es diferente, necesitamos sumar

$$6 + 12 + 18 + \ldots + 1250$$

Pero eso es 6 veces $1 + 2 + 3 + \cdots + 2025$. Así, el resultado es 1+12307950=12307951.

4. Nos están pidiendo calcular

$$35 + 36 + 37 + \cdots + 78$$

Observa que es lo mismo que **sumar desde 1 hasta 78 y luego restar desde 1 hasta 34** (para que la suma empiece en 35). La respuesta es 2486.

5. Aquí conviene hacer la suma de todos los números y luego restar la suma de los que fueron subrayados. Así:

$$(1 + 2 + \cdots + 2026) - (3 + 6 + 9 + \cdots + 2025).$$

La parte que se resta es el triple de $1 + 2 + 3 + \cdots + 675$ por lo que el resultado es

$$2053351 - 3(228150) = 1368901.$$

6. Nuevamente, planteando la suma larga y haciendo deducciones. Notemos que si borras las decenas, por ejemplo, tendríamos ABCD+ABD, pero al hacer la suma larga, es imposible que D+D termine en 1. Por eso no es posible que la cifra borrada haya sido la de las decenas.

Lo mismo pasaría si borramos las centenas o los millares, por lo que la cifra borrada tuvo que ser la de las unidades.

Así, el planteamiento debe ser ABCD + ABC = 6031.

Nos fijamos en la columna de las centenas, ahí tenemos B+A = 0, eso va a significar que estamos "llevando" uno a la columna de los millares, y por tanto A=5. (Observación: cuando sumas dos dígitos diferentes lo más que pueden sumar es 17 por lo que nunca "llevas 2" a la siguiente columna).

Reescribiendo la suma con A=5, deducimos que B+5 termina en cero (centenas) por lo que solo puede pasar cuando A=4 y se está llevando 1 de las decenas. Continuamos este proceso hasta deducir que el número es 5483 y por tanto la suma pedida es igual a 5+4+8+3=20.

7. Podría hacer la suma de las tarjetas.

Si estuvieran completas, la suma sería 2000+2001+2002+...2050 (aunque no se necesita saber la suma, pídeles que lo hagan como práctica, porque ya deben saber sumar "rápido", debe dar 103275).

Pero como falta una, la suma va a dar menos. La diferencia es la tarjeta que falta.

8. La cantidad de números escritos hasta terminar el grupo N,N, ..., N es 1+2+3+4+...+N.

Entonces, podemos preguntarnos qué valor N cumple que 1+2+3+...+N es el más grande posible que no se pasa de 6000. Esto podría plantearse con ecuaciones, pero es más fácil con prueba y error.
Por ejemplo, si N=50, la suma sería 1275.
Si N fuera 100, la suma sería 5050, aún nos falta.
Si N=120 la suma es 7260, ya nos pasamos
Si N=110, la suma es 6105, nos pasamos
Si N=109, la suma es 5995. Entonces, al escribir 6000 números, ya terminamos el bloque 109, 109, 109, 109, ..., 109, estamos DENTRO del bloque 110, 110, 110, ..., 110, y por eso el último número escrito es 110.

Recordatorio:

Los alumnos de secundaria que lo deseen, pueden participar además del proceso de selección correspondiente a su grado escolar, en otro proceso adicional mixto (único para todos los niveles y grados escolares) el día 21 de febrero a las 10:00, en línea, en la página http://ommyuc.org

Ambos procesos son independientes entre sí (es decir, no importa si pasa o no en uno para la selección del otro).