Olimpiada de Matemáticas en Yucatán – Sesión 4

1. «Múltiplos y divisores»

Uno de los temas recurrentes en los problemas de la Olimpiada Estatal de Matemáticas, es el de que un número sea múltiplo de otro. Vamos primero a ilustrar una serie de problemas variados que involucran esta idea, antes de discutir a fondo algunas estrategias.

El siguiente problema apareció en el Examen Inicial (Escuela) de primaria 2015.

Problema (Yucatán 2015) Manuel escribió un número en su libreta. Si lo multiplica por 3, al resultado le resta 2 y al resultado lo multiplica por 4, ¿cuál de los siguientes números no puede ser el resultado final?

a) 15 b) 28 c) 40 d) 4

Solución. Como el último paso consiste en multiplicar por 4, el resultado final debe ser múltiplo de 4, lo cual nos permite saber que la opción final no puede ser $a)15$

Consideremos ahora una pequeña modificación.

Problema. Manuel escribió un número en su libreta. Si lo multiplica por 3, al resultado le resta 2 y al resultado lo multiplica por 4, ¿De las siguientes cuatro opciones, cuál es la única que podría ser el resultado final?

a) 10 b) 32 c) 40 d) 8

Ahora estamos preguntando cuál de los resultados sí podría ser el resultado final.

Al igual que antes, el último paso nos dice que el resultado final será múltiplo de 4, por lo que descartamos la opción $a)10$ ya que no es un múltiplo de 4. Pero ¿cómo descartar entre las otras, ya que todas son múltiplos de 4?

Aquí tenemos que mirar un paso atrás: ¿qué sucedió antes de la última multiplicación? Antes de multiplicar por 4, debimos tener: a) descartado b) 8 c) 10 d) 2

Si leemos con cuidado veremos que primero construimos un múltiplo de 3 (en la primera operación), y luego restamos 2 unidades. En otras palabras, si a las opciones les sumamos 2, recuperamos el múltiplo de 3.

Sin embargo, al sumar 2 en las opciones tenemos $10, 12$, y 4, donde sólo el 12 es múltiplo de 3. Concluimos que de las cuatro opciones, la única que podía ser resultado era $c)40$.

Un caso de especial importancia es cuando un número es o no múltiplo de 2, es decir, problemas que involucren la consideración de si un número es par o impar. Este año, en el examen de Zona de primaria y secundaria encontramos el siguiente problema.

Problema (Yucatán 2025) En una tienda, los chicles cuestan \$3 y las galletas cuestan \$2. Si Luis gastó \$30, ¿Cuántas combinaciones diferentes de chicles y galletas pudo haber comprado? (Por ejemplo, una combinación podría ser: 10 chicles y 0 galletas).

Solución. No sabemos la cantidad exacta de chicles comprados, pero lo que sabemos es que el total es un número par (son \$30), y como cada galleta cuesta \$2, quiere decir que si a \$30 le quitamos lo que costaron los chicles, el resultado debe ser también par.

Por ejemplo, no puede ser que se hayan comprado 3 chicles, porque costarían \$9 y por tanto el resto \$30-\$9 = \$21 es impar, no podría ser cubierto con las galletas.

Entonces, fijándonos en paridad, vemos que la cantidad de chicles que se pueden comprar son: $10, 8, 6, 4, 2$ o 0, por lo que la respuesta es 6.

Estas ideas sobre múltiplos son aplicadas incluso en etapas superiores del concurso

Problema (Concurso nacional, 2024). En el pizarrón, Juan escribe cuatro enteros positivos distintos, todos de una sola cifra. Al multiplicarlos el resultado es 60. ¿Cuánto es lo máximo que puede valer la suma de sus cuatro números?

Solución. Aquí vamos a aplicar una de los temas que, desde la primaria, los alumnos aprenden, por ejemplo cuando se quiere trabajar con operaciones de fracciones, que es el de *factorizaciones*.

Cuando uno piensa en operaciones y números, piensa en combinar dos números para obtener un resultado. Por ejemplo, ¿cuánto es 12 por 6? ¿Cuánto es 8 por 15? Una factorización va en la dirección contraria. Una factorización consiste en partir del resultado final y obtener qué números deberían ser multiplicados para obtener ese resultado.

Por ejemplo, ¿qué números hay que multiplicar para obtener 24? Una posible respuesta sería 6 y 4, pero otra respuesta podría ser 3 y 8. Ambas son factorizaciones, porque estamos encontrando números que al multiplicarse nos dan el resultado 24. Como metáfora, podemos pensar que estamos «construyendo» el número «24» pegando dos ladrillos llamados 6 y 4 o 3 con 8.

Y, aunque pudiera parecer que hay más de una forma de obtener el 24, la realidad es que, esos números que estamos encontrando, a su vez pueden factorizarse también. De modo que si continuamos, obtenemos $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ sin importar cómo hayamos empezado. Esto se conoce como la *factorización en primos* de 24 y nos dice que, esencialmente, el número 24 está construido con los «ladrillos» $2, 2, 2, 3$.

Regresando al problema, tenemos cuatro números cuya multiplicación es igual a 60, por lo que esos cuatro números deben estar formados por los mismos «ladrillos» que 60, es decir $2, 2, 3$ y 5.

Además, nos dicen que los números *deben de ser distintos*, y eso pareciera que es imposible encontrar los números porque el 2 se repite. Pero si nos damos cuenta de que podemos combinar algunos, y luego usar 1 para completar, sí llegamos a soluciones.

Adicionalmente, como el 5 tiene que estar solo, porque si lo multiplicamos por otro de la lista ya no queda el resultado de una sola cifra, tenemos así ya dos de los cuatro números: 1 y 5. Con los «ladrillos» $2, 2, 3$ podemos formar ya sea 4 con 3, o 2 con 6.

Entonces, las sumas posibles son $1 + 5 + 4 + 3 = 13$ y $1 + 5 + 2 + 6 = 14$, por lo que la mayor suma es 14.

2. Criterios de divisibilidad

Debido a la importancia de saber cuándo un número es múltiplo de otro, se establecen una serie de reglas o *criterios de divisibilidad* que permiten saber, no solo si un número es múltiplo de otro, sino que en muchos casos, cuando no lo sea, conocer también el residuo de la división correspondiente.

En vez de listar los criterios de forma consecutiva, vamos a hacer la observación de que se dividen en dos grupos fundamentales: criterios relacionados con la terminación del número, criterios relacionados con la suma de las cifras. Hay otros criterios más elaborados para divisores menos comunes, pero en la mayoría de los casos basta usar esos dos grupos.

2.1. Criterios relacionados con la terminación

Quizás el criterio más famoso relacionado con las terminaciones, es el criterio del 10: un número es múltiplo de 10 cuando termina en 0. Observemos que, como 0 es el único número de una cifra que se puede dividir entre 10, otra forma de expresar este criterio es:

Criterio del 10. Un número es múltiplo de 10, cuando su última cifra es múltiplo de 10 (es decir, su última cifra es 0).

Observemos, sin embargo, que el criterio nos dice algo más. Por ejemplo, consideremos el número 1934. Sabemos que no es múltiplo de 10 porque su última cifra, 4, no lo es, pero como al dividir 4 entre 10, obtenemos un residuo 4, entonces al dividir el número original 1934 entre 10, la división tendrá un residuo igual a 4.

Hay otros dos criterios que tienen exactamente el mismo comportamiento.

Criterio del 2. Un número es múltiplo de 2, cuando su última cifra es múltiplo de 2 (es decir, su última cifra es $0, 2, 4, 6$ u 8).

Criterio del 5. Un número es múltiplo de 5, cuando su última cifra es múltiplo de 5 (es decir, su última cifra es 0 o 5).

Pero también se cumple la propiedad adicional. Consideremos el número 4527. Sabemos que no es múltiplo de 5, porque la última cifra, el 7, no es múltiplo de 5. Pero como al dividir 7 entre 5 el residuo es 2, sabremos también que la división de 4527 entre 5 tendrá residuo 2, incluso sin hacer la operación manualmente.

Estos criterios funcionan así debido al hecho de que la numeración que usamos, decimal, está basada en potencias de 10, y precisamente $2, 5, 10$ son números que dividen a 10.

Hay dos criterios adicionales que podemos considerar en esta categoría.

Criterio del 4. Un número es múltiplo de 4, cuando sus dos últimas cifra forman un múltiplo de 4.

Criterio del 8. Un número es múltiplo de 8, cuando sus tres últimas cifra forman un múltiplo de 8.

Por ejemplo, el número 75124 es múltiplo de 4, porque las últimas dos cifras forman el 24, y 24 sí es múltiplo de 4. Sin embargo 5124 no será múltiplo de 8 debido a que las tres últimas cifras, 124, no forman un múltiplo de 8.

De hecho, como la división de 124 entre 8 deja un residuo 4, la división de 75124 también dejará un residuo de 4.

La razón de que estos criterios existan, es similar a la razón para los criterios de $2, 5$ y 10. Dado que 100 es múltiplo de 4, basta fijarnos en las últimas dos cifras, y como 1000 es múltiplo de 8, basta fijarnos en las últimas tres cifras.

2.2. Criterios relacionados con la suma de las cifras

Los dos criterios principales relacionados con la suma de las cifras son:

Criterio del 3. Un número es múltiplo de 3, cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Criterio del 9. Un número es múltiplo de 9, cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Por ejemplo, 75124 tiene una suma de cifras igual a $7 + 5 + 1 + 2 + 4 = 19$, por lo que no será múltiplo ni de 3 ni de 9, y además, como al dividir 19 entre 3 o entre 9, el residuo es 1, la división de 75124 entre 3 y 9 también tendrá un residuo igual a 1.

La razón por la cual estos criterios funcionan, se debe a que 10, cuando se divide entre 3 o entre 9, deja residuo 1, convirtiendo todas las potencias superiores (decenas, centenas, etc.) en residuos 1, como si fueran unidades.

Un criterio menos conocido en este grupo es el criterio del 11.

Criterio del 11. Un número es múltiplo de 11, cuando la *suma alternada* de sus cifras, comenzando con las unidades, es múltiplo de 11.

En el caso del 75124, la suma alternada (de signos) comenzando por las unidades es

$$4 - 2 + 1 - 5 + 7 = 5$$

y como 5 no es múltiplo de 11, el 75124 no será múltiplo de 11. De hecho, como la división de 5 entre 11 tiene residuo 5, la división de 75124 entre 11 también tendrá un residuo igual a 5.

3. Problemas de práctica.

A continuación presentamos una lista de problemas para práctica, aprovechando para recordar que este documento puede consultarse nuevamente en la página http://ommyuc.org/2025/taller

Problema 1 (Yucatán, 2024) Si contamos de 3 en 3 hacia atrás, comenzando con el 2024, ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en la lista?

a) 1024 b) 524 c) 812 d) 824

Problema 2 (Yucatán, 2024) Si multiplicas los números $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 30$ (todos los números del 1 al 30), ¿cuántos ceros habrá al final del resultado?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 7

Problema 3 (Yucatán, 2024) Tienes tres números enteros y positivos cuya multiplicación es igual a 1230. ¿Cuánto es lo menos que pueden sumar esos 3 números?

Solución. Se resuelve de forma similar al ejemplo dado en el texto.

Problema 4 (Yucatán, 2024) ¿Cuántos números son múltiplos de 24 pero también son divisores de 600?

Solución. Notemos que $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$. Por otro lado $600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Entonces para que un número sea múltiplo de 24 pero dividir a 600, debe contener exactamente tres veces el 2 y también tiene que contener una vez al 3.

Ahora, el 5 puede no aparecer ninguna vez (obtenemos el 24), aparecer una sola vez (obtenemos el 120), o aparecer dos veces (obtenemos el 600). Por lo tanto, hay tres números que cumplen la condición dada.

Problema 5 (Concurso nacional, 2023) La multiplicación de los dígitos de un número natural es igual a 20. Si la suma de sus dígitos es 13, ¿cuál es el menor valor posible de dicho número?

Solución. Como la factorización de 20 es $2 \cdot 2 \cdot 5$, el número más pequeño que usa esas tres cifras es 225. Sin embargo, al igual que en el ejemplo del texto, podemos combinar las cifras y obtener 45, que será el menor valor posible.

Problema 6 (Concurso nacional, 2023) ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que al multiplicar cualesquiera dos cifras consecutivas el producto es par? (Por ejemplo, 827 cumple la propiedad porque 8×2 = 16 es par y también lo es 2×7 = 14).

Solución. Del ejemplo podemos deducir que, mientras la cifra central sea par, las otras cifras no importan. Es decir, si la «estructura» del número es «_ par _», se cumple la condición.

El número central puede ser $0, 2, 4, 6, 8$, teniendo 5 opciones, mientras que la cifra de las centenas tiene 9 (porque no puede ser cero) y la cifra de las unidades tiene 10 opciones (sí incluye al cero). El principio de la multiplicación nos dice que habrá $5 \cdot 9 \cdot 10 = 450$ números con esta propiedad.

Sin embargo, es posible que la cifra central sea impar siempre y cuando las cifras de centenas y unidades sean pares. La «estructura» del número es «PAR _ PAR». El centro puede escogerse de 5 maneras ($1, 3, 5, 7$ o 9), mientras que las centenas solo pueden ser $2, 4, 6, 8$ y las unidades $0, 2, 4, 6, 8$. Por el principio de la multiplicación, el resultado es $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

Concluimos entonces que el total es $450 + 100 = 550$.

Problema 7. Se tiran dos dados bien construidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de las caras que quedan a los lados sean igual a la suma de las caras que quedaron hacia arriba. Nota: En un dado bien construido, todas las caras tienen la misma probabilidad de caer, y cualquier par de lados opuestos tienen una suma igual a 7.

Solución. Cuando tiras un dado, las cuatro caras que quedan en los lados siempre están formadas por dos parejas de lados opuestos y por eso, no importa cómo caiga el dado, las cuatro caras en los lados siempre van a sumar 14.

Como se están tirando dos dados, las caras que quedan a los lados siempre van a sumar 28. Pero son ocho caras, y por tanto su promedio siempre será $\frac{28}{8} = 3.5$ Por eso, es imposible que el promedio de las ocho caras laterales sea igual a la suma de las dos de arriba, por que la suma de las caras de arriba siempre es un número entero y nunca puede ser 3.5. Lo anterior quiere decir, que la probabilidad es cero.